

# نظرية الوجود لمسائل القيم الحدية

التي تشمل المشتقات الكسرية من الجانب الأيسر والأيمن

إعداد

أبرار مهدي بروم

رسالة مقدمة استكمالاً لمتطلبات نيل درجة الماجستير في العلوم

(رياضيات - معادلات تفاضلية)

إشراف:

أ. د. أحمد عيد الصاعدي

أ. د. بشير أحمد محمد

قسم الرياضيات - كلية العلوم

جامعة الملك عبدالعزيز

جدة - المملكة العربية السعودية

١٤٤١ هـ - ٢٠٢٠ م

## المستخلص

في هذه الأطروحة، ناقشنا وجودية الحلول للعديد من مسائل القيمة الحدية الغير المحلية التي تتضمن معاملات تفاضلية وتكاملية كسرية برتب مختلفة من جهة اليمين واليسار. في مشكلتنا الأولى، قمنا بالتحقق من معايير الوجود لمشكلة قيمة حدية غير محلية لمعادلات تفاضلية تكاملية تشتمل على المشتقات التفاضلية المختلطة Caputo من جهة اليمين و Riemann-Liouville من جهة اليسار، وتكاملات Riemann-Liouville التفاضلية برتب مختلفة. وتتعلق المشكلة الثانية بوجودية حلول نظام مزدوج غير محلي لمعادلات تفاضلية تحتوي على مشتقات وتكاملات كسرية مختلطة من اليمين واليسار. تتعامل مشكلتنا الثالثة مع دراسة نظام من المعادلات التفاضلية المزدوجة التي تشمل كلا من المشتقات الكسرية Caputo من جهة اليمين و Riemann-Liouville من جهة اليسار، والتكاملات الكسرية المختلطة، مزودة بشروط حدية تكاملية كسرية غير محلية مزدوجة. في مشكلتنا الرابعة، قدمنا ودرسنا مشكلة قيمة حدية متعددة القيم تشتمل على المشتقات الكسرية Caputo و Riemann-Liouville المختلطة من جانب واحد، وتكاملات Riemann-Liouville الكسرية للعديد من حالات الخرائط متعددة القيم المتضمنة في المشكلة. تتضمن أدواتنا الرئيسية في الدراسة أدوات حديثة في التحليل المالي للخرائط أحادية القيمة ومتعددة القيم. لا بد من الإشارة إلى أن النتائج الواردة في هذه الأطروحة جديدة وتساهم بشكل كبير في الأدوات حول هذا الموضوع. تم نشر النتائج التي تم الحصول عليها في المسألة الأولى والثانية في مجلات SCI، في حين أن ماتبقى من العمل في هذه الرسالة هو "قيد المراجعة" في مجلات SCI / SCI-E (انظر قائمة المنشورات في الصفحة x).

# **Existence Theory for Boundary Value Problems Involving Left-Sided and Right-Sided Fractional Derivatives**

By  
**Abrar Mahdi Broom**

A thesis submitted for the requirements of the degree of Master of Science  
( Mathematics - Differential equations )

**Supervised by**  
**Prof. Ahmed Eid Alsaedi**  
**Prof. Bashir Ahmad Muhammed**

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF SCIENCE  
KING ABDULAZIZ UNIVERSITY  
JEDDAH-SAUDI ARABIA

1441 A.H - 2020 A.D

# Abstract

In this thesis, we have discussed the existence of solutions for several nonlocal boundary value problems involving left-sided and right-sided fractional differential and integral operators of different orders. In our first problem, we have investigated the existence criteria for a nonlocal boundary value problem of integro-differential equations involving mixed right Caputo and left Riemann-Liouville fractional derivatives, and Riemann-Liouville fractional integrals of different orders. The second problem is concerned with the existence of solutions for a nonlocal coupled system of differential equations containing mixed right and left fractional derivatives and integrals. Our third problem deals with the study of a system of coupled differential equations involving both right Caputo and left Riemann-Liouville fractional derivatives and mixed fractional integrals, supplemented with nonlocal coupled fractional integral boundary conditions. In our fourth problem, we have introduced and studied a multi-valued boundary value problem involving mixed one-sided Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives and Riemann-Liouville fractional integrals for several cases of the multivalued maps involved in the problem. Our main tools of study include modern tools of functional analysis for single-valued and multi-valued maps. It is imperative to mention that the results presented in this thesis are new and contribute significantly to the literature on the topic. The results obtained for the first and second problems have been published in SCI journals, while the rest of the work established in this thesis is "under review" in SCI/SCI-E journals (see the list of publications on page x).